

# 令和5年度岡田大学入試問題解答, 解説 (数学)

2023 年 5 月 2 日

1

## ポイント

- (1) A は  $100!$  を 10 で割れる回数を求めればよい. B は 3 辺の長さが分かっているのでどこかの角度の  $\cos$  を求め,  $\sin$  に変換し, 面積を求める. C は重複のある順列の考え方をを用いる. D は  $y$  軸の周りの回転体. 円柱の側面積を足し合わせる方法が楽.
- (2) (左辺)-(右辺) を変形して, 0 以上であることを示す. 「不等式証明は差をとれ」. 差をとって共通する項を消すと, 残りの項から 2 乗の形を得られる.
- (3) 微分の定義を用いて極限を求める.

- (1) A:  $100!$  の末尾の 0 の数は,  $100!$  を 10 で割れる回数と同じである.  $10 = 2 \times 5$  であるから, 10 で割れる回数は, 2 で割れる回数と 5 で割れる回数のうち少ないほうといえる. 2 の倍数より 5 の倍数の方が少ないため, 5 で割れる回数を考える. 1 以上 100 以下の自然数で, 5 の倍数は 20 個,  $5^2 (= 25)$  の倍数は 4 個あるため,  $20 + 4 = 24$  (個) となる.

B: 三角形を ABC とし,  $AB = 7, BC = 8, CA = 9$  とすると,  $\cos B = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{2}{7}$  であり,  $\sin^2 B = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{45}{49}$ , したがって  $\sin B = \frac{3\sqrt{5}}{7}$  である. 三角形 ABC の面積は,  $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} = 12\sqrt{5}$  である.

C:  $(x + y + z)^5$  の展開式における  $x^2 y^2 z$  の係数は, 5 つの  $(x + y + z)$  から  $x$  を 2 つ,  $y$  を 2 つ,  $z$  を 1 つ選ぶ場合の数に等しい. したがって,  $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$  である.

D:  $1 \leq x \leq 2$  の範囲で,  $(x, 0)$  と  $(x, x^2)$  を結ぶ線分を  $y$  軸の周りに 1 回転させると微小な厚さの円柱の側面部分が得られる. この円柱の側面の表面積を  $x = 1$  から  $x = 2$  まで足し合わせることで, 求める体積が得られる. したがって, 求める立体

の体積は,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2 \cdot 2\pi x) dx &= 2\pi \int_1^2 x^3 dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} [x^4]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{2} (2^4 - 1^4) \\ &= \frac{15}{2} \pi\end{aligned}$$

となる.

B について,  $2.2 \leq \sqrt{5} \leq 2.3$  であるから,  $26.4 \leq 12\sqrt{5} \leq 27.6$  である. また, D について  $3.1 \leq \pi \leq 3.2$  であるから,  $23.25 \leq \frac{15}{2}\pi \leq 24$  である. 以上から,  $D \leq A \leq B \leq C$  となる.

(2) ①

$$\begin{aligned}& (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\ &= (a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2) - (a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2) \\ &= a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &\geq 0 \quad \square\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}& (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) \\ &\quad - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_2b_2a_3b_3 + 2a_3b_3a_1b_1) \\ &= (a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2) \\ &\quad - (2a_1a_2b_1b_2 + 2a_2a_3b_2b_3 + 2a_3a_1b_3b_1) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \\ &\geq 0 \quad \square\end{aligned}$$

(3)  $f(x) = e^x$  とする. このとき,  $f(x)$  の  $x = 0$  における微分係数は, 定義より,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$  において  $x = 0$  としたのだから,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h}$  である. また, これは  $f'(0) = e^0 = 1$  に等しい. したがって,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  が示される.  $\square$

[1]は小問集合. どの問題もそれほど難しくはないが, (1)のAや(3)などは見たことがないと難しい問題だったかもしれない. (1)のAは, 5の倍数と25の倍数の数の合計が答えとしているが, これについてももう少し補足する. 1から100までの自然数で, 5の倍数であるものは20個あるため,  $100!$ に含まれる5の倍数をそれぞれ5で割ることを考える. さらに, 25の倍数は一度5で割った後もう一度5で割れるので, さらに5で割ることを考える. 1から100までの自然数の中に25の倍数は4個あるので, さらに5で割れる回数は4回である. ここまでの過程で, 5の倍数は5で1回割られ, 25の倍数は5で2回割られている. 1から100までの自然数の中に $5^3 (= 125)$ の倍数は存在しないので, これで $100!$ に含まれる全ての素因数5が割られている状態になる.

続いて(1)Dについて補足する.  $y$ 軸の周りの回転体の体積を求めるときは, 特定の $x$ 座標で $y$ 軸に平行な線分を $y$ 軸の周りに回転させて得られる円柱の側面積を範囲内のすべての $x$ について足し合わせる方法で解くと計算が楽になりやすい. 通称「バウムクーヘン積分」である. 円柱を重ねて立体を作るのがバウムクーヘンに似ていることからこの名前がついている.  $y$ 軸に垂直な面で切ったときの断面積を求める方法だと, 特定の $y$ の値に対する $x$ の範囲を求める必要があるなど, 計算が大変であるから, この方法を覚えておくとよい.

(1)のB, Dは無理数なので, 不等式を使って値を評価する必要がある.

(2)は左辺と右辺の差をとり変形していくだけである. 不等式の証明は, たいてい左辺と右辺の差をとることで証明できる.

(3)は微分の定義を用いた極限の導出である. この $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ は $e^x$ が登場する式の極限を求めるときによく使用するので知っておくとよいだろう. 教科書に載っている公式ではないため, 使用する際は証明を添えておいた方がよいかもしれない.

線分の長さの和を最小化するのは典型的な問題である．平面  $P$  上の点をどのように表すかが重要．また，平面  $P$  に対して対称な点の座標をどのように決定するか考える必要がある．

平面  $P$  に対して，点  $A$  と対称な点を  $A'$  とする．このとき，平面  $P$  上の点  $Q$  について， $AQ = A'Q$  が成立するので， $AQ + QB = A'Q + QB$  である．いま， $A'Q + QB$  が最小になるのは  $Q$  が線分  $A'B$  上にあるときだから， $Q$  は線分  $A'B$  と平面  $P$  の交点である．

まず  $A'$  の座標について考える． $A$  と  $A'$  は平面  $P$  に関して対称なので， $\overrightarrow{AA'}$  は平面  $P$  に垂直である． $AA'$  と平面  $P$  の交点を  $R$  とすると， $R$  の位置ベクトルはある実数  $a, b$  を用いて  $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) = (a, a+b, b)$  と表される．

また  $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} = (a, a+b, b) - (-1, -1, 1) = (a+1, a+b+1, b-1)$  である．

$\overrightarrow{AR} \perp$  平面  $P$  であるから， $\overrightarrow{AR} = (a+1, a+b+1, b-1)$  と  $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$  との内積は 0 になる．したがって，以下の等式が成立する．

$$(a+1) + (a+b+1) = 0 \Leftrightarrow 2a+b = -2 \quad (1)$$

$$(a+b+1) + (b-1) = 0 \Leftrightarrow a+2b = 0 \quad (2)$$

これを解くと， $(a, b) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$  となる．

つまり， $\overrightarrow{AR} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - (-1, -1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  である． $R$  は  $AA'$  の中点なので， $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AR} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  であり，

$A'$  の座標は， $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = (-1, -1, 1) + \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  である．

続いて，点  $Q$  の座標を求める． $AQ + QB$  を最小にする点  $Q$  は線分  $A'B$  と平面  $P$  の交点である．点  $Q$  は平面  $P$  上の点であるから，ある実数  $s, t$  を用いて，

$$\overrightarrow{OQ} = s(1, 1, 0) + t(0, 1, 1) = (s, s+t, t) \quad (3)$$

と表される．

また， $Q$  は  $A'B$  上の点なので， $A'Q : QB = k : 1-k$  を満たす実数  $k(0 < k < 1)$  が存在す

る。このとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'Q} &= k\overrightarrow{A'B} \\ &= k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA'}) \\ &= k\left((-2, 1, 5) - \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= k\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}k, \frac{4}{3}k, \frac{14}{3}k\right)\end{aligned}$$

また,  $\overrightarrow{OQ}$  について,

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'Q} = \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}k, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k, \frac{1}{3} + \frac{14}{3}k\right) \quad (4)$$

と表せる。

(3), (4) より, 以下の等式が成立する。

$$s = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}k, \quad s + t = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k, \quad \frac{1}{3} + \frac{14}{3}k$$

これを解くと,  $k = \frac{1}{3}, s = -\frac{16}{9}, t = \frac{17}{9}$  となるから,  $\overrightarrow{OQ} = \left(-\frac{16}{9}, \frac{1}{9}, \frac{17}{9}\right)$ ,

つまり求める  $Q$  の座標は  $\left(-\frac{16}{9}, \frac{1}{9}, \frac{17}{9}\right)$  である。

補足, 講評

線分の長さの和を最小化する問題は典型的な問題なので, 多くの人は見たことがあると思う. したがって, 方針を立てるのは容易である. まず, 平面  $P$  に関して  $A$  と対称な点を  $A'$  とし,  $A'B$  と平面  $P$  の交点の座標が求める  $Q$  の座標になる.  $A, A'$  は平面  $P$  に対して対称なので, 平面  $P$  からの距離が等しい. したがって,  $A, A', Q$  によって三角形が作られる時,  $Q$  から  $AA'$  におろした垂線は  $AA'$  を二等分する. したがって, 三角形  $AA'Q$  は二等辺三角形になり,  $AQ = A'Q$  になる. だから,  $AQ + QB = A'Q + QB$  であり,  $AQ + QB$  を最小化することと  $A'Q + QB$  を最小化することは同じ問題になる.  $Q$  は平面  $P$  上を自由に動けるため,  $A', Q, B$  が一直線に並んだ時  $A'Q + QB$  が最小になるのはほぼ自明である. 分からなかった者は, 図を書きながら是非理解してほしい. ちなみに, この解説では点  $A, B$  が平面  $P$  に対して同じ側にあることを認めているが, これを示すには, まず, 平面を表す方程式を考え, それを元に考えられる. 平面の方程式は,  $(x, y, z) = (a, a+b, b)$  と表せることから,  $y = x+z$  であることがすぐ分かる. 点  $A$  と点  $B$  の両方で,  $y$  座標は  $x$  座標と  $z$  座標の和より大きいため, 点  $A, B$  は  $y > x+z$  の領域, つまり平面の上側にあることが分かる.

どちらかという問題なのは  $A'$  や  $Q$  の座標の求め方で, これに苦労した人がいるかもしれない.  $A'$  の座標を求めるときは, 平面に対して対称なときに成立する性質を使う必要がある. 今回の問題だと,  $A$  から平面  $P$  におろした垂線の足を  $R$  とすると,  $R$  は  $AA'$  の中点になっているという性質が利用できる. これを利用して  $R$  の座標を文字でおき,  $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AR}$  を利用する. ここで,  $R$  が平面  $P$  上の点であることから,  $R = (a, a+b, b)$  と表せることに気づけたかどうかポイントである. 2つのベクトル  $(0, 1, 1), (1, 1, 0)$  が平面に含まれているため, それぞれ  $a$  倍,  $b$  倍したものの和  $(a, a+b, b)$  は平面  $P$  上の点全体を表す. 後半,  $Q$  の座標を求めるときには,  $Q$  が  $A'B$  上の点であることから,  $A'Q : QB = k : 1-k$  と表せることを利用した. これにも気づけただろうか. 直線上に点があるが具体的な位置が分からないとき, 点の位置を比で表すことが多い. これが分かれば後は係数を比較するだけである.

手順が多くて計算量もそれなりにあるが, 難しい発想はそれほど必要としない. このような問題で得点できることは他の受験生に差をつけるために重要である.

- (1) 関数同士の積の形の積分には部分積分を使うことができる。
- (2) 積分区間を変更するために、 $x$  を何で置換すればよいか考える。積分区間は  $(0, 1)$  から  $(\alpha, \beta)$  に変わる。
- (3)  $x$  軸でも  $y$  軸でもない軸に関する回転体の問題。このような回転体の体積の求め方は複数あるが、その中でも傘型分割という手法に関する問題。 $x$  軸に垂直な線分を回転の軸の周りに回転させてできる円錐の側面積を足し合わせることで立体の体積が求まる。

$$(1) I(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \int_0^1 \left( \frac{1}{m+1} x^{m+1} \right)' (1-x)^n \\ &= \left[ \frac{x^{m+1}}{m+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} n(1-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \end{aligned}$$

以上の等式を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \\ &= \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} I(m+2, n-2) \\ &= \dots \\ &= \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} \dots \frac{1}{m+n} I(m+n, 0) \\ &= \frac{n!}{\frac{(m+n)!}{m!}} \int_0^1 x^{m+n} dx \\ &= \frac{m!n!}{(m+n)!} \frac{1}{m+n+1} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad \square \end{aligned}$$

- (2) (1) の等式において積分区間を  $\alpha$  から  $\beta$  にするために、 $y = (\beta - \alpha)x + \alpha$  と置換すると、

$$x^m (1-x)^n = \left( \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha} \right)^m \left( \frac{\beta-y}{\beta-\alpha} \right)^n = \frac{(y-\alpha)^m (\beta-y)^n}{(\beta-\alpha)^{m+n}}, \frac{dy}{dx} = \beta - \alpha$$

であるから、(1) で示した等式で変数を  $x$  から  $y$  に変換すると、

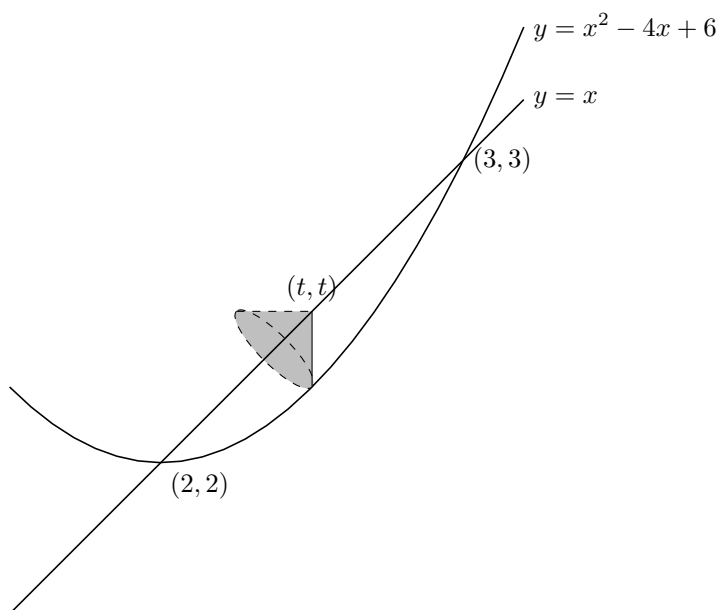
$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(y-\alpha)^m (\beta-y)^n}{(\beta-\alpha)^{m+n}} \cdot \frac{1}{\beta-\alpha} dy = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(y-\alpha)^m (\beta-y)^n}{(\beta-\alpha)^{m+n+1}} dy = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

上式の両辺に  $(\beta - \alpha)^{m+n+1}$  を掛けることで,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が示される.  $\square$

- (3) 直線と曲線の式から  $y$  を消去すると,  $x = x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, 3$  よって, 直線と曲線の交点の座標は  $(2, 2), (3, 3)$  である ( $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}), (\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ ). よって, 求める立体が存在する  $x$  の範囲は  $2 \leq x \leq 3$  である. ここで,  $2 \leq t \leq 3$  を満たす  $t$  に対して,  $x$  座標が  $t$  である直線と曲線上の点を結んでできる線分を直線  $y = x$  の周りに 1 回転させると, ある円錐の側面積が現れる (下図参照).



上の図の灰色で示された部分の円錐の側面積を,  $2 \leq t \leq 3$  を満たすすべての  $t$  について足し合わせたものが, 求める立体の体積になる.  $x$  座標が  $t$  のときの円錐の側面積を考える. 円錐の母線の長さは  $t - (t^2 - 4t + 6) = -t^2 + 5t - 6$  で, 底面の半径は, 母線の長さの  $\cos 45^\circ$  倍となる. したがって, 円錐の側面積は,

$$\begin{aligned} (-t^2 + 5t - 6) \cdot (-t^2 + 5t - 6) \cdot \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-t^2 + 5t - 6)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (t - 2)^2 (t - 3)^2 \end{aligned}$$

となる ( $\boxed{\text{オ}}$ ).

求める立体の体積は, これを  $t = 2$  から  $t = 3$  まで積分したものであるから,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^3 (t - 2)^2 (t - 3)^2 dt$$

である ( $\boxed{\text{カ}}$ ).

この積分を計算すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^3 (t-2)^2 (t-3)^2 dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^3 (t-2)^2 (3-t)^2 dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2!2!}{(2+2+1)!} (3-2)^{(2+2+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{30} \\ &= \frac{1}{30\sqrt{2}} \end{aligned}$$

である (  ).

(1),(2) は積分を用いた有名な等式の証明, (3) はその等式を利用して積分の計算を簡略化するという内容である. (1) は, 2つの関数  $x^m$ ,  $(1-x)^n$  の積を積分している. 一般に, 2つの関数の積の形になっている積分は, 部分積分を使うことで計算できることが多い. 部分積分の公式は,  $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$  である. 導出は, 積の微分の式の両辺を積分して変形すればよい. 部分積分の式を見ると, 左辺では  $f(x)$  にあった微分が, 右辺では  $g(x)$  に移っている. 部分積分を繰り返し使うことで,  $g(x)$  が繰り返し微分されるため, 次数を下げるができる. 次数を十分下げて 0 にすると, 1つの関数の積分になり, これは簡単に計算できる.

また, (1) では,  $I(m, n)$  と  $I(m+1, n-1)$  の関係を導出した後, 「繰り返し用いる」という表現をしている. これは,  $I(m, n)$  と  $I(m+1, n-1)$  の関係が分かったら, 同様に  $I(m+1, n-1)$  と  $I(m+2, n-2)$  の関係も分かり,  $I(m, n)$  と  $I(m+2, n-2)$  の関係も分かる. このように, 漸化式を繰り返し用いることで,  $I(m, n)$  と  $I(m+n, 0)$  の関係まで分かる.  $I(m+n, 0)$  は簡単に計算できるため, これで定積分の値が求まる. 今回のように, 添字にあたる変数が2つ存在する漸化式はこうに解くしかないが, 数学Bの「数列」で登場する一般的な漸化式も同様に, 漸化式を「繰り返し用いる」ことで簡単に解ける. 例えば, 漸化式  $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 2$  を考えると,  $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$  と変形できるから,  $a_n - 1 = 2(a_{n-1} - 1) = 2^2(a_{n-2} - 1) = \dots = 2^{n-1}(a_1 - 1)$  であるから,  $a_n = 2^{n-1} + 1$  がすぐに求まる. このような方法を漸化式を「読む」と表現されている先生もいらっしゃいます. なぜ「読む」という表現なのでしょう?

(2) は, 積分範囲を変換するだけである.  $x$  の範囲は  $(0, 1)$  から  $(\alpha, \beta)$  であるから,  $x = 0$  のとき  $y = \alpha$ ,  $x = 1$  のとき  $y = \beta$  となるような  $y$  で置換すればよいことになる.  $(x, y)$  の組が2つ分かっているのだから, 直線の式を求めるときと同様の手法で  $y$  を  $x$  で表す.  $(0, \alpha)$ ,  $(1, \beta)$  を通る直線の方程式を求めると考えるとよい.

(3) は, (2) の等式を使うと楽に積分の計算ができるという例を表している. このように,  $x$  軸に垂直な線分を直線の周りに1回転させてできる円錐の側面積を足し合わせて立体の体積を求める方法を俗に「傘型分割」という. 正確には, 円錐の側面積は微小な厚さ  $dt$  を持っており, 立体の微小部分の体積 (円錐の側面積  $\times dt$ ) を足し合わせるというイメージである (立体の微小部分の厚さを  $dt$  とするのは高校の範囲外であるから, ここでは深く触れない). この積分の計算には,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^3 (t-2)^2(3-t)^2 dt$  が登場し, これは4次式の積分であるから, 計算が非常に大変である. この計算を簡略化するために, (2) の等式が使える. この (2) の等式は他にも使い道があって, 例えば,  $m = n = 1$  とすれば,  $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$  となる. これは, 放物線と直線で囲まれた部分の面積を求める公式になる. 共通テスト等, 時間が限られているときに積分を高速化できるため, 是非身につけてほしい.

この問題の主題は積分でも  $y = x$  の周りの回転体でもなく, 部分点を獲得することである. (1), (2) とともに証明される結果は問題文中に書いてあるため, 前の設問が解けなくても, 前の設問の結果を利用して後の設問を解くことができるようになっている. 途中で詰まってもあきらめずに, 後の問題に得点できそうな箇所はないか探すのは, 1点でも多く得点するために重要である. この大問では, (2), (3) のそれぞれは前の問題の結果を使うので, それ単体でも解答可能であった.

## ポイント

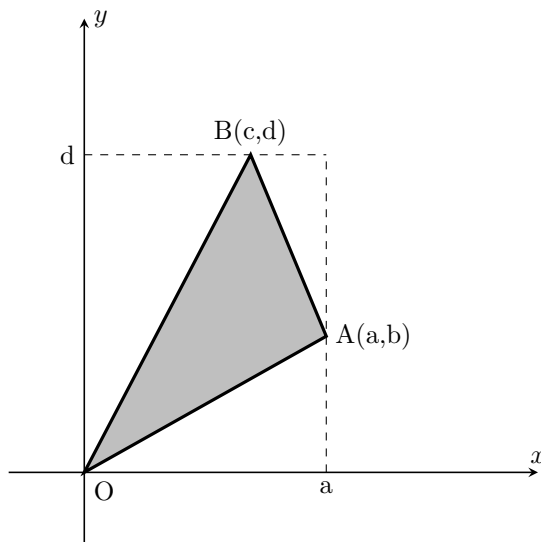
- (1) 複素数平面上の点を実数平面上の点に変換することができる．実数平面上なら三角形の面積はすぐ求められる．
- (2) (1) の等式を用いると面積はすぐに求まる．三角形ができない場合もあるので注意．

## (1) (解法 1)

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$  ( $i$  は虚数単位) とする．このとき，複素数平面上の点 A, B に対応する実数平面上の点はそれぞれ  $(a, b), (c, d)$  である．実数平面上で原点と点  $(a, b), (c, d)$  の 3 点によってつくられる三角形の面積を求める．求める面積は，下図で，長方形の面積から不要な三角形の面積を引いたものであるから，

$$\begin{aligned}
 & ad - \frac{1}{2}|cd| - \frac{1}{2}|a - c||d - b| - \frac{1}{2}|ab| \\
 &= |ad - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}(ad - ab - cd + bc) - \frac{1}{2}ab| \\
 &= |\frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}bc| \\
 &= \frac{1}{2}|ad - bc|
 \end{aligned}$$

である．



また， $\alpha\bar{\beta}$  の虚部は，

$$\begin{aligned}
 \alpha\bar{\beta} &= (a + bi)(c - di) \\
 &= ac - adi + bci - bd \\
 &= (ac - bd) + (bc - ad)i
 \end{aligned}$$

より， $|bc - ad|$  であるから，三角形の面積と， $\alpha\bar{\beta}$  の虚部の絶対値の  $\frac{1}{2}$  倍は等しい．□

(解法 2)

OA と OB のなす角を  $\theta$  とする. 求める三角形の面積を  $S$  とすると,  $S = \frac{1}{2}|\alpha||\beta|\sin\theta$  である.

3 点 OAB が時計回りでこの順にあるとき,  $\theta$  は  $\frac{\alpha}{\beta}$  の偏角である.

よって,  $\sin\theta = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|} = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$  である. ここで,  $\beta\bar{\beta} = |\beta|^2$  より,  $\frac{1}{\beta} = \frac{\bar{\beta}}{|\beta|^2}$  なので,  $\sin\theta = \frac{1}{|\alpha||\beta|}\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})$  である (ただし,  $\operatorname{Im}(z)$  は  $z$  の虚部を表す).

以上より,  $S = \frac{1}{2}|\alpha||\beta|\sin\theta = \frac{1}{2}|\alpha||\beta|\frac{1}{|\alpha||\beta|}\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}) = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})|$  となる. OAB の順番が入れ替わると,  $\frac{\alpha}{\beta}$  の偏角は  $-\theta$  となるが,  $\sin\theta = \sin(-\theta)$  であるから同様に証明できる.  $\square$

- (2) 方程式  $x^2 + ax + a = 0$  が実数解を持つとき, 原点と方程式の 2 つの解に対応する点は全て, 常に実軸上にある. したがって, 三角形はできない. よって, 三角形が作られるとき, 方程式は虚数解を持つ. 方程式が虚数解を持つ条件は, 判別式を  $D$  とすると,  $D < 0$  である. よって, 方程式  $x^2 + ax + a = 0$  が虚数解を持つような  $a$  の値の範囲は,  $a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow a(a - 4) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 4$  である. 以降,  $a$  はこの範囲にあるものとする.

方程式が虚数解を持つとき, その 2 解は  $\frac{-a \pm \sqrt{4a - a^2}i}{2}$  ( $i$  は虚数単位) である. この 2 解を  $\alpha, \beta$  とするとき,

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\beta} &= \frac{-a + \sqrt{4a - a^2}i}{2} \cdot \frac{-a + \sqrt{4a - a^2}i}{2} \\ &= \frac{a^2 - 2a\sqrt{4a - a^2}i - (4a - a^2)}{4} \\ &= \left(\frac{a^2 - 2a}{2}\right) - \left(\frac{a\sqrt{4a - a^2}}{2}\right)i\end{aligned}$$

であるから, その虚部の絶対値は  $\frac{a\sqrt{4a - a^2}}{2}$  である ( $0 < a < 4$  であるから  $a\sqrt{4a - a^2} > 0$ ). つまり, 複素数平面上で原点と方程式の 2 解の表す点によってできる三角形の面積は,  $\frac{1}{2}|\alpha\bar{\beta}| = \frac{a\sqrt{4a - a^2}}{4}$  である. 三角形の面積を最大化するのと  $a\sqrt{4a - a^2}$  を最大化することは同値であるから,  $0 < a < 4$  における  $a\sqrt{4a - a^2}$  の最大値を考える.  $0 < a < 4$  において  $a\sqrt{4a - a^2} > 0$  であるから,  $a\sqrt{4a - a^2}$  の最大値を与える  $a$  の値と  $(a\sqrt{4a - a^2})^2 = 4a^3 - a^4$  の最大値を与える  $a$  の値は同じである.

以降,  $0 < a < 4$  における  $4a^3 - a^4$  の最大値を考える.  $f(a) = 4a^3 - a^4$  とすると,  $f'(a) = 0$  の解は  $a = 0, 3$  である.  $0 < a < 4$  の範囲での  $f(a)$  の増減は以下のようになる.

|         |   |     |    |     |   |
|---------|---|-----|----|-----|---|
| $a$     | 0 | ... | 3  | ... | 4 |
| $f'(a)$ | 0 | +   | 0  | -   | 0 |
| $f(a)$  | 0 | ↗   | 最大 | ↘   | 0 |

したがって,  $a = 3$  のとき  $f(a)$  は最大となるから, 求める三角形の面積も最大になる.

このときの三角形の面積は  $\frac{3\sqrt{4 \cdot 3 - 3^2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$  である.

補足, 講評

(1) は, 複素数平面上の点を実数平面上の点と対応させて考えると非常にやりやすい. 解法 2 のやり方は少し複雑だが, 複素数平面特有の計算の練習には最適である. 解法 2 の変形についていくつか補足する.

まず解説 1 行目の三角形の面積については, 数学 I で学習したものと同じである. 3 行目は,  $OA(\alpha)$  と  $OB(\beta)$  のなす角が  $\theta$  であるということは,  $\alpha$  の表す点は  $\beta$  の表す点を原点中心に角度  $\theta$  だけ回転させ, 原点からの距離を調整した点になる. 複素数平面上での回転は複素数を掛けることで行うことができ, 偏角  $\theta$  の複素数を掛けることで点を角度  $\theta$  だけ回転させられる. したがって,  $\beta$  に掛けることで  $\alpha$  になる,  $\frac{\alpha}{\beta}$  の偏角が  $\theta$  であると分かる.

次の行の  $\sin\theta$  の部分を補足する. まず  $\frac{\alpha}{\beta}$  は  $|\frac{\alpha}{\beta}|(\cos\theta + i\sin\theta)$  である.  $|\frac{\alpha}{\beta}|$  の部分は  $\beta$  から  $\alpha$  に変換するときの原点からの距離の変化,  $()$  内は回転させる角度を表している. この式を変形すると,  $\sin\theta = \frac{\text{Im}(\frac{\alpha}{\beta})}{\frac{\alpha}{\beta}}$  が得られる. さらに,  $\beta\bar{\beta} = |\beta|^2$  を利用して  $\sin\theta$  の式を変形する. この変形は, 三角形の面積にある  $|\alpha||\beta|$  を消去するために行う.  $OAB$  の配置が入れ替わった場合,  $\frac{\alpha}{\beta}$  の偏角は  $-\theta$  になるが,  $\sin\theta = \sin(-\theta)$  であるから, (解説で  $\sin\theta$  だったものが全て  $\sin(-\theta)$  に置き換わるだけなので) 計算結果は同じになる.

(2) は, 三角形が作れるのは方程式が虚数解を持つときに限ることに気づけたかが重要. それに気づければ, 以降はそれほど難しくない. 三角形の面積を (1) の式を用いて表し, その最大値を求める. 三角形の面積は  $\sqrt{\quad}$  を用いた形で表されるので, その 2 乗の最大値を求めると楽である. 三角形の面積は必ず 0 以上なので, 2 乗しても最大値を与える  $a$  の値は変わらない (一般に, 「 $\{f(x)\}^2$  が最大値  $\Leftrightarrow f(x)$  が最大値」は成立しないことに注意.  $\{f(x)\}^2$  を最大にする  $x$  は,  $-f(x)$  を最大にする  $x$  の可能性もあるからである. しかし,  $f(x) > 0$  となる場合は, この 2 つの条件は同値である). 面積の 2 乗の最大値は微分と増減表を用いて簡単に求められる.

この問題は全体的にみてそれほど難しくなかっただろう. 是非最後まで解ききってほしい. ちなみに, この問題も, (1) の結果が問題文に書かれているため, (2) 単体でも解くことができる.

余談だが, 本来 [4](#) は chatGPT に作成してもらう予定だったが, 具体的な問題を作成させるのは難しかったのでこの問題に差し替えた. chatGPT にどのように聞けば, 具体的な数学の問題を生成してくれるのだろうか.

- (1) 問題文中で与えられた定義を正しく理解できているか確認しているだけ。微分は難しい。
- (2) あるグラフが他のグラフの下側にあるということを数式で表せれば、証明したい不等式が分かるはずである。
- (3) 接線の方程式は  $y = ax + b$  とおくと証明が楽。(2) の条件を使用して不等式を作って接線の方程式と比較する。発想が少し難しい。

- (1) ①  $f(x) = \sin x \Leftrightarrow f'(x) = \cos x \Leftrightarrow f''(x) = -\sin x$  である。 $f''(x) = \sin x$  は全ての実数  $x$  で正になるわけではないため、 $f(x)$  は凸関数ではない。
- ②  $f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow f''(x) = e^{-x}$  である。全ての実数  $x$  で  $e^{-x} > 0$  であるから、 $f(x)$  は凸関数である。
- ③  $f(x) = -\log_2 x = -\frac{\log x}{\log 2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x \log 2} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{1}{x^2 \log 2}$  である。全ての実数  $x$  で  $\frac{1}{x^2 \log 2} > 0$  であるから、 $f(x)$  は凸関数である。
- ④  $f(x) = x^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow f''(x) = 2 > 0$  より、 $f(x)$  は凸関数である。

以上から、②、③、④が凸関数である。

- (2)  $y = f(x)$  のグラフの  $x = x_1$  における接線の方程式は、傾きが  $f'(x_1)$  で点  $(x_1, f(x_1))$  を通るから、 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x + (f(x_1) - f'(x_1)x_1)$  である。この直線を  $y = g(x)$  とする。このとき、直線  $y = g(x)$  のグラフが曲線  $y = f(x)$  のグラフの下側にあるということと、全ての実数  $x$  で  $f(x) - g(x) \geq 0$  が成立することは同値である。以降、全ての実数  $x$  で  $f(x) - g(x) \geq 0$  を示す。

$h(x) = f(x) - g(x)$  で  $h(x)$  を定義し、 $h(x)$  の増減を考える。

$$\begin{aligned} h'(x) &= \{f(x) - f'(x_1)x - f(x_1) + f'(x_1)x_1\}' \\ &= f'(x) - f'(x_1) \end{aligned}$$

である。これは  $x = x_1$  のとき 0 となる。

また、 $h''(x) = f''(x)$  である。 $f(x)$  は凸関数より、 $f''(x)$  は常に正であるから、 $h''(x)$  も常に正である。よって、 $h(x)$  の増減は以下になる。

|          |            |       |            |
|----------|------------|-------|------------|
| $x$      | $\cdots$   | $x_1$ | $\cdots$   |
| $h(x)$   | $\searrow$ | 0     | $\nearrow$ |
| $h'(x)$  | -          | 0     | +          |
| $h''(x)$ | +          | +     | +          |

以上より、全ての実数  $x$  で、 $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$  であることがいえた。つまり、 $y = f(x)$  の  $x = x_1$  における接線は常にグラフの下側にある。□

- (3) 点  $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\right)$  における接線の方程式を  $y = ax + b$  とすると、以下の等式が成立する.

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = a\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) + b \quad (1)$$

また、(2) より、この接線は、常に  $y = f(x)$  のグラフの下側にあるため、この直線上で  $x$  座標が  $x_i$  である点について、以下の等式が成立する.

$$f(x_i) \geq ax_i + b \quad (2)$$

(2) の式を  $\lambda_i$  倍して  $i = 1, 2, \dots, n$  まで足し合わせると、以下の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) &\geq a\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) + b\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \\ &= a\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) + b \end{aligned}$$

この不等式と (1) 式より、 $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$  が成立する.

(1) は問題文で与えられた定義を理解していれば解けるはず. 関数も基本的なもののばかりなので微分も難しくない.

(2) は,  $y = g(x)$  のグラフが  $y = f(x)$  のグラフより下側にある  $\Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$  であることを思いつかないといけない. これは, グラフをイメージすればすぐ分かる.  $f(x) - g(x) \geq 0$  を示すためには微分を用いた. 今回, 凸関数の定義として  $f''(x) > 0$  が与えられていたため, それを利用するために微分を用いるという発想にたどり着けただろう. 今回は,  $f''(x) > 0$  を用いるため,  $h''(x)$  の符号まで考える必要があることに注意.  $h'(x) = 0$  を満たす  $x$  の値は  $x = x_1$  のみかどうかは  $h''(x)$  を見るまでは分からないためである.

一般に,  $f(x) \geq 0$  の形の不等式は, 微分を用いて  $f(x)$  の増減を考えて解くことが多い.

(3) は不等式の証明であるが, あまり見慣れない証明方法である. 接線の方程式と, それを用いた不等式を作成し, それらを合わせて不等式を証明するという手法は難しかったのではないだろうか. そもそも問題文が難しく, 接点の座標が和の形式になっているのに戸惑った人も多いだろう.

(1) は簡単で, (2) は証明の方針さえ考えれば解けるため, ここまでは解いておきたい. 逆に (3) は難しいので, 解けなくても構わないような内容である. しばらく考えて解法が思いつかない問題は飛ばして他の問題に移るというのも, 制限時間内に自分の得点を最大化するために重要である.

この問題は, 普段教科書や参考書で見かける問題とはかなり系統が違ったと思った方も多いだろう. この問題は大学数学とも関連する内容なので, その内容について説明する. この問題は, 「情報理論」の基礎で使用する数学を扱う問題である. 「情報理論」というのは, 簡単に説明すると, 「情報をどのようにして数学的に定義するか」<sup>a</sup>を考える学問分野である. 情報理論で登場する「情報量」は, ある事象が起こる確率を  $x$  として,  $-\log_2 x$  で定義される. これは (1)②で登場した関数である. この情報量が凸関数であることから, 情報理論では凸関数に関する定理を使用する. (3) で示した不等式は「イェンゼンの不等式」と呼ばれ, 情報理論では, 「2つの情報がどの程度類似しているか」を表す「ダイバージェンス」という値の評価に用いられる. また, イェンゼンの不等式は, 相加相乗平均の不等式の証明などに使うこともできる.

<sup>a</sup>そのほかにも, 「限られたビット数で効率よく情報を送受信する方法」や「情報に含まれるノイズをどのように減らすか」を考える分野も総称して情報理論と呼ぶ.

## ポイント

- (1) 右への移動を $\rightarrow$ 、上への移動を $\uparrow$ で表して、 $\rightarrow$ と $\uparrow$ の並べ方を考える.
- (2)  $(a, b)$  を通る場合の数を考えて、全ての経路の数から引けばよい.
- (3) 各点への経路の数を図に書き込む. ある点への経路の数は、その点の下と左の点への経路の数の合計である.
- (4) 最初に通る対角線上の点がどこかを考える.

- (1) 右に進むことを $\rightarrow$ 、上に進むことを $\uparrow$ で表す.  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  まで移動するとき、上に合計  $n$  回、右に合計  $n$  回進むから、上と右に進む順番が異なると異なる経路となる. つまり、 $\rightarrow n$  個と  $\uparrow n$  個を 1 列に並べる順列の総数が、求める経路の数となる. よって、求める経路の数は、

$$\frac{2n!}{n!n!} (= 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdots (n+1))$$

である.

- (2)  $(a, b)$  を通らずに  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  まで行く経路の総数は、  
 $((0, 0)$  から  $(n, n)$  まで行く全ての経路の数)  $- ((a, b)$  を通り  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  まで行く経路の数)

で求められる.

また、 $(a, b)$  を通る経路の数は、

$((0, 0)$  から  $(a, b)$  まで行く経路の数)  $\times ((a, b)$  から  $(n, n)$  まで行く経路の総数)

で求められる.

したがって、 $(a, b)$  を通る経路の数は、 $\frac{(a+b)!}{a!b!} \frac{(2n-a-b)!}{(n-a)!(n-b)!}$  である.

よって、 $(a, b)$  を通らない経路の数は、

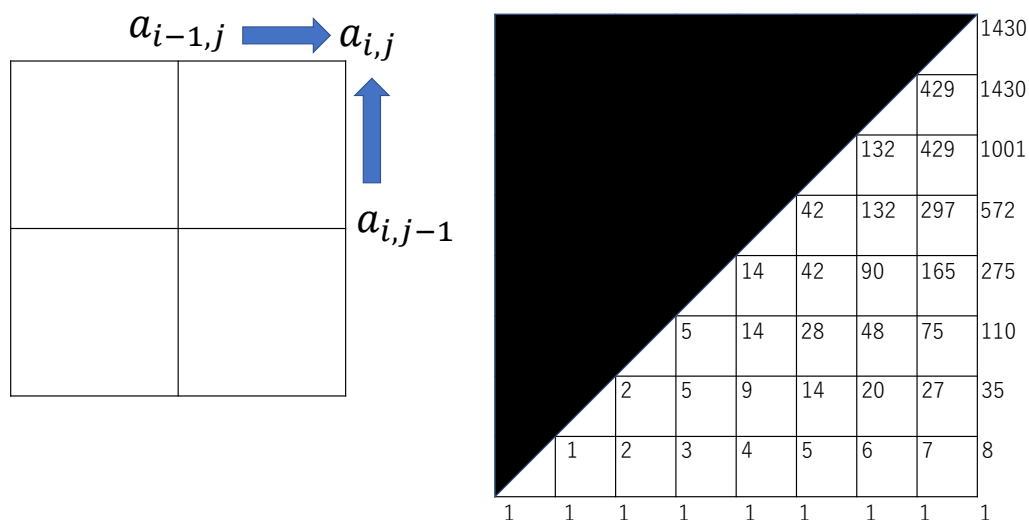
$$\frac{2n!}{n!n!} - \frac{(a+b)!}{a!b!} \frac{(2n-a-b)!}{(n-a)!(n-b)!}$$

である.

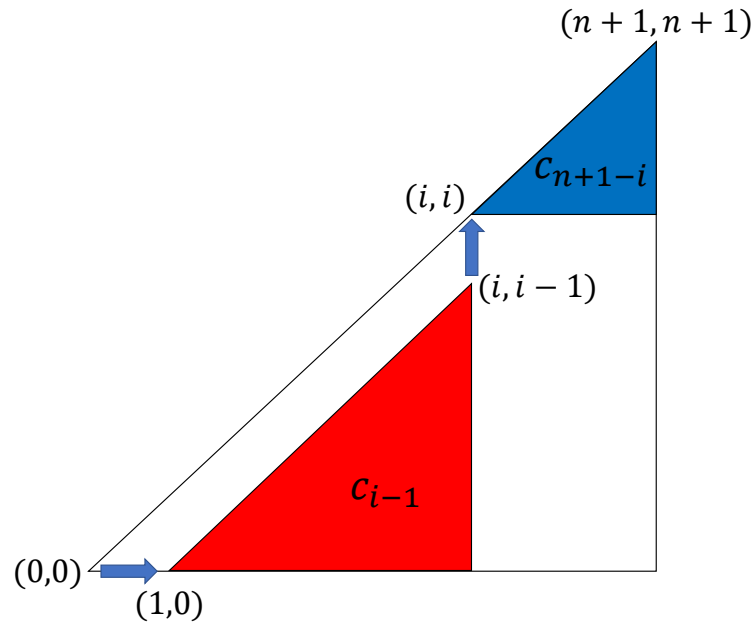
- (3) 問題文の条件のもと、 $(0,0)$  から  $(i,j)$  まで行く経路の数を  $a_{i,j}$  ( $0 \leq i, j \leq n, i \geq j$ ) とする. 例えば,  $a_{1,0}$  は  $(0,0)$  から  $(1,0)$  まで行く経路の数であるから, その値は 1 である ( $(0,0)$  から右に移動する方法のみだから). また,  $a_{1,1} = 1$  である ( $(1,0)$  を経由する方法のみ,  $(0,1)$  は問題文の条件より通れない). このとき,  $a_{i,j}$  と  $a_{i-1,j}, a_{i,j-1}$  について, 以下の関係が成立する (ただし,  $a_{0,0} = 1$  であり,  $i, j \geq 1$  のときに限る).

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & (i > j) \\ a_{i,j-1} & (i = j) \end{cases}$$

この等式は,  $i = j$ , つまり格子の対角線上の点に行く経路は, その点の下側から行く経路のみであり, それ以外の点に行く経路は, その点の下側から行く経路と左側から行く経路の総数であるということを表している (次ページの図の左を参照するとよい). また, この考えに則って各マスの右に  $(0,0)$  からそのマスへの経路の数を書き込んだものは, 以下の図のようになる. したがって,  $c_8 = 1430$  である.



- (4)  $(0,0)$  を出発した後、初めて格子の対角線上の点  $((i,j))$  において  $i=j$  となる点) を通るタイミングを考える．縦横  $n+1$  マスの格子を考えると、 $(0,0)$  を出発した後初めて通る対角線上の点は  $(i,i) (1 \leq i \leq n+1)$  の  $n$  個の候補がある． $(i,i)$  で初めて対角線上の点を通る場合で、 $(0,0)$  から  $(n+1,n+1)$  まで行く経路の数を考える．これは  $(0,0)$  から  $(i,i)$  まで  $((0,0)$  以外の) 対角線上の点を通らずに行く経路の数と、 $(i,i)$  から  $(n+1,n+1)$  まで行く経路の数の積に等しい  $((i,i)$  で初めて対角線上の点を通るので、 $(0,0)$  から  $(i,i)$  まで行く経路の途中では対角線上の点を通ってはいけない)． $(0,0)$  から  $(i,i)$  まで対角線上の点を通らない経路の数は、 $(1,0)$  から  $(i,i-1)$  まで対角線上の点を通らずに行く経路の数と同じなので、 $c_{i-1}$  通りである (下図参照)．また  $(i,i)$  から  $(n+1,n+1)$  まで行く経路の数は  $c_{n+1-i}$  である (こちらは対角線上の点を通っても構わないことに注意)．



よって、点  $(i,i)$  で初めて対角線上の点を通る経路の数は、 $c_{i-1}c_{n+1-i}$  通りである．これを  $1 \leq n+1$  それぞれについて足し合わせると、

$$\begin{aligned}
 & c_{n+1} \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} c_{i-1}c_{n+1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^n c_i c_{n-1}
 \end{aligned}$$

となる．

補足, 講評

(1), (2) は教科書や参考書でよく見かける問題. 是非正解したい. 右への移動を→で表し, 上への移動を↑で表す. (2) は,  $(a, b)$  を通らない経路の数を直接求めるのは難しいので, 全ての経路の数から  $(a, b)$  を通る経路の数を引くことで求める. これは「余事象」の活用である.

(3) は格子のサイズが固定なので, 各点への経路の数を図に書き込むことで答えを求められる. 中学校入試でも見られる解法である. 知っている人はすぐ解けたであろう. 知らない場合は, ある点への経路の数は, (その下の点への経路の数)+(その左の点への経路の数) で求められることに自力で気づく必要があるため難しかったかもしれない. 対角線上の点では, 左の点からの経路は存在しないことに注意.

(4) は, 「対角線上の点  $(i, i)$  で初めて対角線上に到達する経路」を各  $i$  について足し合わせる. 高校数学の範囲では, このように「初めて〇〇したのがいつか」という場合分けの仕方はあまり登場しないため, 見慣れない問題だったと思う. また, 解法に気づいても, 前半 ( $(i, i)$  に到達する前) は対角線を通ってはいけませんが, 後半は対角線を自由に通ってよいという設定から漸化式をうまく導くのも難しい.

この問題の数学的背景を少し紹介する. (4) の漸化式  $c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-1}$  を解くと,  $c_n = \frac{1}{n+1} {}_{2n}C_n$  が得られる. この数を「カタラン数」といい, 今回の格子と対角線の問題以外にも, 様々な問題の解として登場する. 例えば, 「 $n+2$  角形に対角線を  $n-1$  本引いて三角形に分割する方法」や「 $n+1$  チームのトーナメント表の総数」等の答えもこのカタラン数である. (4) の漸化式は高校範囲では解くことができないが, 数列の「母関数」を使うことで求められる. 母関数とは, 数列の各項を係数とする多項式である ( $a_n$  が  $x^n$  の係数になっている). 母関数をうまく求めることが出来れば, 数列の一般項を求められる. カタラン数の漸化式は, 母関数をうまく求めることができるため解くことができる (母関数が求められないため解けない漸化式も多い). 解き方については難しいのでここでは紹介しない. 気になる者は各自調べてほしい.

全体的に簡単な問題と難しい問題がはっきりしている問題セットであった。[1], [4], [5](1), [6](1), (2)あたりは全然難しい問題ではない。この辺りを確実に正解しつつ、差がつく問題、[2], [3], [5](2)あたりでできるだけ多く得点する力が求められる。[5](3)と[6](4)は高校数学の範囲ではあまり見ない難しい問題なので、これらに時間を取られ過ぎず、確実に得点できる問題を落とさないのが重要である。また確実に得点できる問題を見分ける力も必要である。

今回の問題のテーマは、「多くの分野を出題する」、「数学的な背景のある問題を出題する」、「部分点をもらいやすい問題を出題する」ことであった。1つ目の多くの分野を出題するという意図のために、[1]の小問集合や、その他の問題のテーマを極力被らせないようにした。今回の問題セットで全く出題のないテーマは確率、数列くらいだろうか。2つ目の数学的な背景のある問題は、主に[5]と[6]で、それぞれ教科書にないようなトピックを扱っている。最後の部分点を。もらいやすい問題については、小問のある問題では最初の小問を簡単にした。また、[3]については、問題文中に証明する内容を書いておくことで、(1), (2), (3)のどれも単独で正解を出せるようにした。今回の問題を通して、受験生に1点でも多くの点をとる方法を理解してもらえたらよいと思う。