

令和5年度 入学試験問題

数 学

(150 分)

注 意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはならない。
2. 問題冊子は2ページで、問題は□1から□6までの6問ある。6題すべてに解答すること。
3. 解答用紙には氏名と受験番号を正しく記入すること。
4. 解答用紙のスペースが足りなくなったら裏面を使用しても構わない。
5. 試験中に質問がある場合やトイレに行きたくなった場合は、腰を大きく反らせて監督者に伝えること。
6. 漸化式は読むこと。読まなかった場合は減点とする。
7. 試験中に居眠りをした者は、つまみ出す。再入室は認めない。

1 (1) 次の4つの数を小さい順に並べよ.

A: $100!$ の末尾に並ぶ0の数

B: 3辺の長さが7, 8, 9の三角形の面積

C: $(x + y + z)^5$ の展開式で, $x^2 y^2 z$ の係数

D: $y = x^2$ の $1 \leq x \leq 2$ の部分と直線 $x = 1, x = 2, x$ 軸で囲まれる部分を y 軸の周りに1回転させて得られる立体の体積

(2) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ は任意の実数とする. 次の不等式が成立することを証明せよ.

① $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$

② $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ を示せ.

2 空間内に2点 $A: (-1, -1, 1), B: (-2, 1, 5)$ と, 原点, 点 $(1, 1, 0)$, 点 $(0, 1, 1)$ を通る平面 P がある. 平面 P 上の点で, $AQ + QB$ を最小にする点 Q の座標を求めよ.

3 (1) m, n は 0 以上の整数とする. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ を示せ.

(2) (1) の式の積分範囲を変換することで,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1} \text{ を示せ.}$$

(3) 直線 $y = x$ と曲線 $y = x^2 - 4x + 6$ で囲まれた図形を直線 $y = x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を以下のように求めた. 以下の「ア」から「キ」に当てはまる数や式を答えよ.

直線と曲線の交点は (「ア」, 「イ」) と (「ウ」, 「エ」) の 2 つなので, 求める立体が存在する x 座標の範囲は「ア」 $\leq x \leq$ 「ウ」である. ここで, 「ア」 $\leq t \leq$ 「ウ」を満たす t に対して, 直線と曲線上で x 座標が t である点同士を結んでできる線分を直線 $y = x$ の周りに 1 回転させると, ある円錐の側面積が現れる. この面積を t を用いて表すと「オ」となる. この円錐の側面積を「ア」 $\leq t \leq$ 「ウ」を満たす全ての t に対して足すと, 求める立体の体積が得られる. したがって, 求める立体の体積を定積分で表すと「カ」となる. この定積分は, (2) で示した式を用いて計算でき, その値は「キ」である.

- 4 (1) α, β は虚部が 0 でない複素数とする. 複素数平面上で原点, 点 $A(\alpha)$, 点 $B(\beta)$ の 3 点によって作られる三角形の面積は $\alpha\bar{\beta}$ の虚部の絶対値の $\frac{1}{2}$ 倍であることを示せ.
- (2) a は実数の定数とする. 方程式 $x^2 + ax + a = 0$ の 2 つの解に対応する複素数平面上的 2 点と原点によって三角形が作られるとき, その面積の最大値を求めよ.

- 5 ある x の範囲において、 $f''(x) > 0$ を満たす関数は、その x の範囲において「凸関数」であると呼ばれる。凸関数について、次の間に答えよ。

(1) 次の 4 つの関数 $f(x)$ の中で、全ての実数 x の範囲で凸関数であるものをすべて選べ。

① $f(x) = \sin x$

② $f(x) = e^{-x}$

③ $f(x) = -\log_2 x$

④ $f(x) = x^2$

(2) $x = x_1$ で $f(x)$ が凸関数であるとする。このとき、 $y = f(x)$ のグラフの $x = x_1$ における接線は必ずグラフの下側にあることを示せ。

(3) $f(x)$ は全ての実数 x で凸関数とする。任意の $n (\geq 2)$ 個の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ と $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ を満たす n 個の実数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がある。

点 $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \right)$ における接線を考えることで、

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right)$$

が成立することを示せ。

6 $n \times n$ の格子状の道がある．格子の左下の点の座標を $(0,0)$ とし，右に 1 マス進むと x 座標が 1 増え，上に 1 マス進むと y 座標が 1 増えるようにそれぞれの点に座標を与える．このとき，以下の問に答えよ．

- (1) $(0,0)$ から (n,n) まで最小の移動回数で行く方法は何通りあるか．
- (2) 点 (a,b) (a, b は $0 < a < n, 0 < b < n$ を満たす整数) を通らずに $(0,0)$ から (n,n) まで最小の移動回数で行く方法は何通りあるか．
- (3) 格子のうち $x \geq y$ の部分のみ通って $(0,0)$ から (n,n) まで最小の移動回数で行く方法を c_n 通りとする． c_8 を求めよ．
- (4) c_{n+1} を $c_0, c_1, \dots, c_n$ を用いて表せ．

